Compléments de calcul intégral

I. Intégrale double sur un compact

1°) Intégrale double sur un produit de segments

Théorème :

Si $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{C}$ est une fonction continue alors les fonctions $x\mapsto\int_{y=c}^{d}f(x,y)\mathrm{d}y$ et $y\mapsto\int_{x=a}^{b}f(x,y)\mathrm{d}x$ sont continues et $\int_{x=a}^{c}\left(\int_{y=c}^{d}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x=\int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=a}^{b}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

Déf : La valeur commune de ces intégrales est appelée intégrale double de f sur $[a,b]\times[c,d]$, on la note $\iint_{[a,b]\times[c,d]}f$ ou $\iint_{[a,b]\times[c,d]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

2°) Intégrale double sur une partie élémentaire

Déf : Une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ est dite x-élémentaire ssi on peut écrire $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$ avec $\varphi_1,\varphi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonctions continues vérifiant $\varphi_1(x)<\varphi_2(x)$ sur $]a,b[$.

Déf : Une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ est dite y-élémentaire ssi on peut écrire $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/c\le y\le d,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$ avec $\psi_1,\psi_2:[c,d]\to\mathbb{R}$ fonctions continues vérifiant $\psi_1(y)<\psi_2(y)$ sur $]c,d[$

Déf : Une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ est dite élémentaire ssi elle à la fois x et y-élémentaire

Déf : Soit $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{C}$ continue.

Si A est x-élémentaire, on pose $\iint_A f=\int_{x=a}^{b}\left(\int_{y=\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$.

Si A est y-élémentaire, on pose $\iint_A f=\int_{y=c}^{d}\left(\int_{x=\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$.

Théorème :

Si A désigne une partie élémentaire les deux quantités précédentes coïncident.

Prop : $\iint_A\lambda f+\mu g=\lambda\iint_A f+\mu\iint_A g$,

Prop : Si $f,g:A\to\mathbb{R}$ et $f\le g$ alors $\iint_A f\le\iint_A g$.

Prop : $\left|\iint_A f\right|\le\iint_A|f|$.

Prop : Si $f\ge0$ et $\iint_A f=0$ alors $f=0$ ou $\mathrm{Aire}(A)=0$.

3°) Intégrale double sur une partie simple

Déf : Une partie A de $\mathbb{R}^2$ est dite simple ssi elle est réunion d'une famille finie de parties élémentaires d'intérieures deux à deux disjoints i.e. $A=A_1\cup\ldots\cup A_n$ avec $A_1,\ldots,A_n$ parties élémentaires et $i\ne j\Rightarrow A_i^\circ\cap A_j^\circ=\varnothing$.

Déf : Pour $f:A\to\mathbb{C}$ continue, on appelle intégrale double de f sur A le scalaire $\iint_A f=\sum_{i=1}^{n}\iint_{A_i}f$.

4°) Formule de changement de variables

Soit U,V deux ouverts de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi:U\to V$ un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme. $\varphi(x,y)=(u(x,y),v(x,y))$

Le jacobien de φ en (x,y) est noté $\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}$.

Théorème :

Soit A est une partie incluse dans U.

Si A et $\varphi(A)$ sont des parties simples de $\mathbb{R}^2$ alors pour toute fonction $f:\varphi(A)\to\mathbb{C}$ continue on a la relation : $\iint_{\varphi(A)} f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint_A f(u(x,y),v(x,y))\left|\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Le passage d'une quantité à l'autre est appelé changement de variable défini par la relation $(u,v)=\varphi(x,y)$.

5°) Intégration en polaire

Déf : Une partie A du plan $\mathbb{R}^2$ est dite θ-élémentaire ssi on peut écrire :
$A=\{(r\cos\theta,r\sin\theta)/\theta_1\le\theta\le\theta_2,r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\}$ avec $\theta_1\le\theta_2\le\theta_1+2\pi$ et $r_1,r_2:[\theta_1,\theta_2]\to\mathbb{R}$ continues vérifiant $0\le r_1<r_2$ sur $]\theta_1,\theta_2[$.

Théorème :

Si A est une partie simple et θ-élémentaire alors pour toute fonction $f:A\to\mathbb{C}$ continue
$\iint_A f=\int_{\theta=\theta_1}^{\theta_2}\left(\int_{r=r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$.

II. Intégrale double sur un produit d'intervalles quelconques

I et J désignent des intervalles non vides et non singuliers de $\mathbb{R}$.

1°) Intégrale double d'une fonction positive sur un produit d'intervalles

Déf : Soit $f:I\times J\to\mathbb{R}^+$ continue. On dit que f est intégrable sur $I\times J$ ssi il existe un réel M tel que pour tout $P=[a,b]\times[c,d]\subset I\times J$ $\iint_P f\le M$.

On pose alors $\iint_{I\times J} f=\sup_{P=[a,b]\times[c,d]\subset I\times J}\iint_P f$ appelée intégrale double de f.

Prop : Soit $f,g:I\times J\to\mathbb{R}^+$ continues.

Si f et g sont intégrables alors $f+g$ et λf pour $\lambda\ge 0$ le sont aussi.

Si $f\le g$ et si g est intégrable alors f l'est aussi.

Si $\iint_{I\times J} f=0$ alors $f=0$.

Prop : Si $f:I\times J\to\mathbb{R}^+$ continue.

f est intégrable sur $I\times J$ ssi f l'est sur $I^\circ\times J^\circ$ et alors $\iint_{I^\circ\times J^\circ} f=\iint_{I\times J} f$.

2°) Fonctions à valeurs réelles ou complexes

Déf : On dit qu'une fonction continue $f:I\times J\to\mathbb{C}$ est intégrable sur $I\times J$ ssi la fonction $|f|:I\times J\to\mathbb{R}^+$ est intégrable. On note $L^1(I\times J,\mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions $f:I\times J\to\mathbb{K}$ continues et intégrables sur $I\times J$.

Pour $f:I\times J\to\mathbb{R}$ continue intégrable, les fonctions $f^+=\sup(f,0)$ et $f^-=\sup(-f,0)$ le sont aussi.

Déf : Si $f:I\times J\to\mathbb{R}$ continue est intégrable sur $I\times J$, on pose $\iint_{I\times J} f=\iint_{I\times J} f^+-\iint_{I\times J} f^-$.

Pour $f:I\times J\to\mathbb{C}$ continue intégrable, les fonctions $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ les sont aussi.

Déf : Si $f:I\times J\to\mathbb{C}$ continue est intégrable sur $I\times J$, on pose $\iint_{I\times J} f=\iint_{I\times J}\mathrm{Re}(f)+i\iint_{I\times J}\mathrm{Im}(f)$.

Prop : Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue et (I_n), (J_n) des suites exhaustives de segments de I, J.

Si f est intégrable sur $I \times J$ alors la suite de terme général $\iint_{I_n \times J_n} f$ converge et $\iint_{I \times J} f = \lim_{n \to +\infty} \iint_{I_n \times J_n} f$.

Théorème :

$L^1(I \times J, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I \times J, \mathbb{K})$ et l'application $f \mapsto \iint_{I \times J} f$ y définit une forme linéaire.

Prop : Pour $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue et intégrable : $\left| \iint_{I \times J} f \right| \leq \iint_{I \times J} |f|$.

Prop : Pour $f, g : I \times J \to \mathbb{R}$ continues et intégrables. Si $f \leq g$ alors $\iint_{I \times J} f \leq \iint_{I \times J} g$.

3°) Formule de Fubini

Théorème : (admis)

Soit $f : I \times J \to \mathbb{R}^+$ continue.

Si pour tout $x \in I$, $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur J et si $x \mapsto \int_J f(x,y)\mathrm{d}y$ est intégrable sur I alors f est intégrable sur $I \times J$ et $\iint_{I \times J} f = \int_I \left(\int_J f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

Cor : On énonce un résultat semblable obtenu en échangeant x et y. Par suite et sous réserve d'intégrabilité des fonctions : $\int_I \left(\int_J f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_J \left(\int_I f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$.

Théorème : (admis)

Soit $f : I \times J \to \mathbb{C}$ continue et intégrable.

Si pour tout $x \in I$ la fonction $y \mapsto f(x,y)$ est intégrable sur J et si $x \mapsto \int_J f(x,y)\mathrm{d}y$ est intégrable sur I alors : $\iint_{I \times J} f = \int_I \left(\int_J f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$.

Cor : On énonce un résultat semblable obtenu en échangeant x et y. Par suite si f est intégrable alors sous réserve d'intégrabilité des fonctions : $\int_I \left(\int_J f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_J \left(\int_I f(x,y)\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$.

4°) Passage en polaires

Théorème :

Soit $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ continue et intégrable :

Sous réserve d'intégrabilité $\iint_{\mathbb{R}^{+2}} f = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \left(\int_{r=0}^{+\infty} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r \mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta$.

III. Intégrales curvilignes

U désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Dans la pratique $n = 2$ ou 3.

1°) Forme différentielle

Déf : On appelle forme différentielle définie sur U toute application $\omega : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

On convient de noter $\mathrm{d}x_i$ l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_i$, on peut alors écrire $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\mathrm{d}x_i$.

Prop : $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\mathrm{d}x_i$ est de classe $\mathcal{C}^k$ ssi les applications $P_1, \ldots, P_n$ le sont.

Théorème :

Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 1$) alors $\mathrm{d}f$ est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{k-1}$.

Plus précisément : $\mathrm{d}f = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \cdots + \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$.

2°) Forme différentielle exacte

Déf : Une forme différentielle ω définie et continue sur U est dite exacte ssi il existe $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\omega = \mathrm{d}f$. On dit alors que f est une primitive de ω.

Prop : Soit $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\mathrm{d}x_i$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur U.

Pour que ω soit exacte, il est nécessaire que $\forall i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$: $\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial P_j}{\partial x_i}$.

3°) Forme différentielle fermée

Déf : Une forme différentielle $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\mathrm{d}x_i$ de classe $\mathcal{C}^1$ est dite fermée ssi elle satisfait

$\forall i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$: $\dfrac{\partial P_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial P_j}{\partial x_i}$.

Déf : L'ouvert U est dit étoilé ssi $\exists a \in U, \forall b \in U, [a,b] \subset U$.

Théorème : de Poincaré

Une forme différentielle fermée définie sur un ouvert étoilé est exacte.

4°) Intégrale d'une forme différentielle

Soit $\omega(x) = \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\mathrm{d}x_i$ une forme différentielle continue définie sur U et $\Gamma = ([a,b], M)$ un arc $\mathcal{C}^1$ inscrit dans U i.e. tel que $\forall t \in I, M(t) \in U$. Notons, $M(t) = (x_1(t),\ldots,x_n(t))$.

Déf : On appelle intégrale curviligne de ω le long de l'arc orienté Γ le réel :

$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \sum_{i=1}^{n} P_i(x)\mathrm{d}x_i = \int_a^b \sum_{i=1}^{n} P_i(M(t))x_i'(t)\mathrm{d}t$

Lorsque l'arc Γ est fermé (i.e. $M(a) = M(b)$), on note $\oint_\Gamma \omega$.

Prop : $\int_\Gamma \omega$ n'est pas modifié par changement de paramétrage croissant et transformée en son opposé par changement de paramétrage décroissant.

Déf : On appelle arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux toute famille $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n)$ avec $\Gamma_i = ([a_i,b_i], M_i)$ des arcs $\mathcal{C}^1$ tels que $\forall 1 \leq i \leq n-1, M_i(b_i) = M_{i+1}(a_{i+1})$.

Déf : Soit ω une forme différentielle définie et continue sur U et $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n)$ un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux inscrit dans U. On appelle intégrale de ω le long de Γ le réel : $\int_\Gamma \omega = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Gamma_k} \omega$.

Théorème :

Si ω est une forme différentielle exacte sur U de primitive f et si Γ est un arc $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'extrémité A et B alors $\int_\Gamma \omega = f(B) - f(A)$.

En particulier, si l'arc γ est fermé $\oint_\Gamma \omega = 0$.

5°) Formule de Green-Riemann

Soit $\mathcal{D}$ une partie simple non vide de $\mathbb{R}^2$ dont le bord ∂D est parcouru dans le sens direct.

Théorème :

Pour $\omega(x,y) = P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U contenant $\mathcal{D}$ on a : $\oint_{\partial D^+} \omega = \iint_{\mathcal{D}} \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Cor : $\mathrm{Aire}(\mathcal{D}) = \oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y = -\oint_{\partial D^+} y\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\oint_{\partial D^+} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$ et $\mathrm{Aire}(\mathcal{D}) = \dfrac{1}{2}\oint_{\partial D^+} \rho^2 \mathrm{d}\theta$.